Příklady na absolutní hodnotu

Definice absolutní hodnoty

Pro libovolné reálné číslo a platí

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{je-li } a > 0, \\ 0, & \text{je-li } a = 0, \\ -a, & \text{je-li } a < 0. \end{cases}$$

Příklady:

$$|3| = 3, \qquad |0| = 0, \qquad |-3| = -(-3) = 3.$$

1. Rovnice $|ax + b| = c$

Rozlišíme tři případy:

$$\begin{aligned} ax + b > 0 \quad &\Rightarrow \quad ax + b = c, \\ ax + b = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = c, \\ ax + b < 0 \quad &\Rightarrow \quad -(ax + b) = c \Rightarrow ax + b = -c. \end{aligned}$$

Příklad Vyřešte rovnici

$$|3x + 12| = 21.$$

$$\begin{aligned} 3x + 12 > 0 \quad &\Rightarrow 3x + 12 = 21 \Rightarrow x = 3, \\ 3x + 12 = 0 \quad &\Rightarrow 0 = 21 \quad \text{(neplatí)}, \\ 3x + 12 < 0 \quad &\Rightarrow -3x - 12 = 21 \Rightarrow x = -11. \end{aligned}$$

Kontrola

$$|3 \cdot 3 + 12| = |21| = 21,$$

$$|3 \cdot (-11) + 12| = |-21| = 21.$$

$$\boxed{x \in \{-11, 3\}}$$

2. Nerovnice $|ax + b| \leq c$

Opět rozlišíme tři případy:

$$\begin{aligned} ax + b > 0 \quad &\Rightarrow ax + b \leq c, \\ ax + b = 0 \quad &\Rightarrow 0 \leq c, \\ ax + b < 0 \quad &\Rightarrow -(ax + b) \leq c \Rightarrow ax + b \geq -c. \end{aligned}$$

Příklad Vyřešte nerovnici

$$|4x+3| \leq 5.$$

$$\begin{aligned}
4x+3>0 &\quad \Rightarrow 4x+3 \leq 5 \Rightarrow x \leq \tfrac{1}{2},\\
4x+3=0 &\quad \Rightarrow 0 \leq 5 \quad \text{(vždy platí)},\\
4x+3<0 &\quad \Rightarrow -4x-3 \leq 5 \Rightarrow x \geq -2.
\end{aligned}$$

Spojením obou podmínek dostáváme

$$-2 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Kontrola
Například pro $x=-1$:

$$|4(-1)+3| = |-1| = 1 \leq 5.$$

$$\boxed{-2 \leq x \leq \frac{1}{2}}$$

3. Nerovnice $|ax+b| \geq c$

Rozlišíme tři případy:

$$\begin{aligned}
ax+b>0 &\quad \Rightarrow ax+b \geq c,\\
ax+b=0 &\quad \Rightarrow 0 \geq c,\\
ax+b<0 &\quad \Rightarrow -(ax+b) \geq c \Rightarrow ax+b \leq -c.
\end{aligned}$$

Příklad Vyřešte nerovnici

$$|2x+2| \geq 6.$$

$$\begin{aligned}
2x+2>0 &\quad \Rightarrow 2x+2 \geq 6 \Rightarrow x \geq 2,\\
2x+2=0 &\quad \Rightarrow 0 \geq 6 \quad \text{(neplatí)},\\
2x+2<0 &\quad \Rightarrow -2x-2 \geq 6 \Rightarrow x \leq -4.
\end{aligned}$$

Kontrola
Například pro $x=-5$:

$$|2(-5)+2| = |-8| = 8 \geq 6.$$

$$\boxed{x \leq -4 \ \text{ nebo } \ x \geq 2}$$

Shrnutí

Pro $c \geq 0$ lze výsledky zapsat stručněji:

$$|A| = c \quad \Longleftrightarrow \quad A = c \ \text{ nebo } \ A = -c,$$

$$|A| \leq c \quad \Longleftrightarrow \quad -c \leq A \leq c,$$

$$|A| \geq c \quad \Longleftrightarrow \quad A \leq -c \ \text{ nebo } \ A \geq c.$$