

Algebraické řešení nerovnosti s absolutní hodnotou

V tomto dokumentu vyřešíme dvě nerovnice s absolutní hodnotou jako dva nezávislé příklady. Použijeme čistě algebraickou metodu založenou přímo na **definici absolutní hodnoty reálného čísla**.

Podle definice pro libovolný výraz V platí:

$$|V| = \begin{cases} V & \text{pro } V > 0 \\ 0 & \text{pro } V = 0 \\ -V & \text{pro } V < 0 \end{cases}$$

V našich příkladech je vnitřním výrazem $V = x - 2$. U každé nerovnice proto nezávisle vyšetříme tyto tři algebraické možnosti.

Příklad 1: Řešení nerovnice $|x - 2| < 5$

Možnost I: Výraz uvnitř je kladný ($x - 2 > 0 \implies x > 2$)

Absolutní hodnotu nahradíme samotným výrazem:

$$\begin{aligned} x - 2 &< 5 \\ x &< 7 \end{aligned}$$

Hledáme čísla, která splňují podmínku $x > 2$ a zároveň $x < 7$. Dostáváme první dílčí řešení:

$$K_{II} = (2; 7)$$

Možnost II: Výraz uvnitř je nulový ($x - 2 = 0 \implies x = 2$)

Dosadíme $x = 2$ přímo do původní nerovnice:

$$\begin{aligned} |2 - 2| &< 5 \\ 0 &< 5 \quad (\text{Platí}) \end{aligned}$$

Protože získáme pravdivý výrok, číslo 2 je řešením:

$$K_{III} = \{2\}$$

Možnost III: Výraz uvnitř je záporný ($x - 2 < 0 \implies x < 2$)

Absolutní hodnotu odstraníme tak, že výrazu změníme znaménko:

$$\begin{aligned} -(x - 2) &< 5 \\ -x + 2 &< 5 \\ -x &< 3 \\ x &> -3 \end{aligned}$$

Hledáme čísla, která splňují podmínku $x < 2$ a zároveň $x > -3$. Dostáváme třetí dílčí řešení:

$$K_{III} = (-3; 2)$$

Celkový výsledek Příkladu 1

Sjednocením všech tří nezávislých možností získáme konečné řešení:

$$K_1 = K_{1I} \cup K_{1II} \cup K_{1III} = (2; 7) \cup \{2\} \cup (-3; 2) = (-3; 7)$$

Příklad 2: Řešení nerovnice $|x - 2| > 5$

Možnost I: Výraz uvnitř je kladný ($x - 2 > 0 \implies x > 2$)

Absolutní hodnotu vynecháme:

$$\begin{aligned}x - 2 &> 5 \\x &> 7\end{aligned}$$

Hledáme čísla, která splňují podmínku $x > 2$ a zároveň $x > 7$. Dostáváme první dílčí řešení:

$$K_{2I} = (7; \infty)$$

Možnost II: Výraz uvnitř je nulový ($x - 2 = 0 \implies x = 2$)

Dosadíme $x = 2$ do původní nerovnice:

$$\begin{aligned}|2 - 2| &> 5 \\0 &> 5 \quad (\text{Neplatí})\end{aligned}$$

Tento výrok je nepravdivý, takže číslo 2 v tomto případě řešením není:

$$K_{2II} = \emptyset$$

Možnost III: Výraz uvnitř je záporný ($x - 2 < 0 \implies x < 2$)

Změníme znaménko výrazu uvnitř absolutní hodnoty:

$$\begin{aligned}-(x - 2) &> 5 \\-x + 2 &> 5 \\-x &> 3 \\x &< -3\end{aligned}$$

Hledáme čísla, která splňují podmínku $x < 2$ a zároveň $x < -3$. Dostáváme třetí dílčí řešení:

$$K_{2III} = (-\infty; -3)$$

Celkový výsledek Příkladu 2

Sjednocením všech tří nezávislých možností získáme konečné řešení:

$$K_2 = K_{2I} \cup K_{2II} \cup K_{2III} = (7; \infty) \cup \emptyset \cup (-\infty; -3) = (-\infty; -3) \cup (7; \infty)$$