

Výpočet souřadnic bodů A a B na jednotkové hyperbole (Minkowského rovina)

Krátké odvození vycházející z Lorentzovy transformace

Úvod

V Minkowského rovině (x, ct) hraje roli „jednotková hyperbola“

$$(ct)^2 - x^2 = 1,$$

která je v relativistické geometrii obdobou jednotné kružnice v euklidovské geometrii. Lorentzova transformace mezi souřadnicemi (x, ct) a (x', ct') lze zapsat ve tvaru (Schoutenův tvar):

$$\begin{aligned}x' &= x \cosh \varphi - ct \sinh \varphi, \\ct' &= -x \sinh \varphi + ct \cosh \varphi,\end{aligned}\tag{1}$$

kde φ je *rapidity* (hyperbolický úhel), související s rychlostí v transformace vztahem

$$\tanh \varphi = \frac{v}{c}.$$

V následujícím textu najdeme souřadnice bodů A a B — průsečíků jednotkové hyperboly s osami nové soustavy x' a ct' .

Bod A (průsečík hyperboly s osou x')

Bod A leží na ose x' v soustavě S' , takže v soustavě S' má $t' = 0$. Chceme tedy najít souřadnice (x, ct) takového bodu, který v transformaci (1) splňuje $ct' = 0$ a současně leží na jednotkové hyperbole.

Z rovnice (1) se pro bod A bereme tyto rovnice:

$$\begin{aligned}x' &= 1 = x \cosh \varphi - ct \sinh \varphi, \\ct' &= 0 = -x \sinh \varphi + ct \cosh \varphi.\end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme ct :

$$-x \sinh \varphi + ct \cosh \varphi = 0 \quad \implies \quad ct = x \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = x \tanh \varphi.$$

Dosadíme do první rovnice:

$$\begin{aligned}1 &= x \cosh \varphi - (x \tanh \varphi) \sinh \varphi \\&= x \left(\cosh \varphi - \frac{\sinh^2 \varphi}{\cosh \varphi} \right) = x \frac{\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi}{\cosh \varphi}.\end{aligned}$$

Použijeme identitu pro hyperbolické funkce $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$. Z toho plyne

$$1 = x \frac{1}{\cosh \varphi} \quad \implies \quad x = \cosh \varphi.$$

A tedy

$$ct = x \tanh \varphi = \cosh \varphi \cdot \tanh \varphi = \sinh \varphi.$$

Výsledek pro bod A :

$$A = (x, ct) = (\cosh \varphi, \sinh \varphi).$$

Bod B (průsečík hyperboly s osou ct')

Bod B leží na ose ct' v soustavě S' , tedy tam platí $x' = 0$. Hledáme souřadnice (x, ct) , které splňují

$$\begin{aligned}x' = 0 &= x \cosh \varphi - ct \sinh \varphi, \\ct' = 1 &= -x \sinh \varphi + ct \cosh \varphi.\end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme x :

$$x \cosh \varphi - ct \sinh \varphi = 0 \quad \implies \quad x = ct \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = ct \tanh \varphi.$$

Dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned}1 &= -(ct \tanh \varphi) \sinh \varphi + ct \cosh \varphi \\&= ct \left(-\frac{\sinh^2 \varphi}{\cosh \varphi} + \cosh \varphi \right) = ct \frac{\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi}{\cosh \varphi}.\end{aligned}$$

Opět použijeme $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$, takže

$$1 = ct \frac{1}{\cosh \varphi} \quad \implies \quad ct = \cosh \varphi.$$

A tedy

$$x = ct \tanh \varphi = \cosh \varphi \cdot \tanh \varphi = \sinh \varphi.$$

Výsledek pro bod B :

$$B = (x, ct) = (\sinh \varphi, \cosh \varphi).$$

Doplňující poznámka – vztah k β a γ

Často se používají veličiny

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh \varphi, \quad \gamma = \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Pak lze body A a B také zapsat ve tvaru

$$A = (\gamma, \gamma\beta), \quad B = (\gamma\beta, \gamma),$$

což je vyjádření typické pro relativistickou mechaniku.