

Odvození rapidity ve speciální teorii relativity

Hlavní autor AI, Dušan Polanský spíš ji inspiroval

1 Úvod

V rámci speciální teorie relativity se často zavádí bezrozměrná veličina zvaná **rapidita** (značí se obvykle symbolem ϕ nebo θ). Rapidita slouží jako alternativní parametrizace rychlosti tělesa a má zásadní význam při skládání rychlostí, neboť se na rozdíl od klasických rychlostí skládá aditivně.

Vztah mezi rapiditou ϕ a bezrozměrnou rychlostí $\beta = \frac{v}{c}$ (kde v je rychlost tělesa a c je rychlost světla ve vakuu) je definován jako:

$$\phi = \operatorname{artanh}(\beta) \quad (1)$$

Cílem tohoto dokumentu je odvodit explicitní vyjádření této funkce pomocí přirozeného logaritmu:

$$\phi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \quad (2)$$

2 Odvození vztahu

Z definice inverzní funkce k hyperbolickému tangens (argument hyperbolického tangens, artanh) plyne, že pokud platí $\phi = \operatorname{artanh}(\beta)$, pak můžeme psát:

$$\beta = \tanh(\phi) \quad (3)$$

Hyperbolický tangens je definován jako poměr hyperbolického sinu a kosinu, které lze dále vyjádřit pomocí exponenciálních funkcí s bázi e :

$$\tanh(\phi) = \frac{\sinh(\phi)}{\cosh(\phi)} = \frac{\frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2}}{\frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2}} = \frac{e^\phi - e^{-\phi}}{e^\phi + e^{-\phi}} \quad (4)$$

Dosazením této definice do rovnice (3) získáme algebraickou rovnici pro β :

$$\beta = \frac{e^\phi - e^{-\phi}}{e^\phi + e^{-\phi}} \quad (5)$$

Pro zjednodušení a odstranění záporných exponentů vynásobíme čitatele i jmenovatele zlomku výrazem e^ϕ :

$$\beta = \frac{(e^\phi - e^{-\phi}) \cdot e^\phi}{(e^\phi + e^{-\phi}) \cdot e^\phi} = \frac{e^{2\phi} - 1}{e^{2\phi} + 1} \quad (6)$$

Nyní je naším cílem vyjádřit z této rovnice neznámou ϕ . Vynásobíme celou rovnici jmenovatelem $(e^{2\phi} + 1)$:

$$\beta(e^{2\phi} + 1) = e^{2\phi} - 1 \quad (7)$$

Roznásobíme levou stranu:

$$\beta e^{2\phi} + \beta = e^{2\phi} - 1 \quad (8)$$

Členy obsahující $e^{2\phi}$ převedeme na jednu stranu rovnice a ostatní členy na stranu druhou:

$$\beta + 1 = e^{2\phi} - \beta e^{2\phi} \quad (9)$$

Na pravé straně vytkneme společný výraz $e^{2\phi}$:

$$1 + \beta = e^{2\phi}(1 - \beta) \quad (10)$$

Protože rychlost hmotného tělesa je vždy nižší než rychlost světla ($|v| < c$), platí, že $|\beta| < 1$. Výraz $(1 - \beta)$ je tedy nenulový a můžeme jím obě strany rovnice bezpečně vydělit:

$$e^{2\phi} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (11)$$

Abychom osamostatnili exponent, aplikujeme na obě strany rovnice přirozený logaritmus ($\ln$):

$$\ln(e^{2\phi}) = \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) \quad (12)$$

Vzhledem k tomu, že $\ln(e^x) = x$, dostáváme:

$$2\phi = \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) \quad (13)$$

Nakonec celou rovnici vydělíme dvěma, čímž získáváme hledaný výsledný vztah:

$$\phi = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) \quad (14)$$

Tím je odvození úspěšně dokončeno.

3 Fyzikální souvislost

Při skládání dvou rychlostí v_1 a v_2 ve stejném směru dává speciální teorie relativity výslednou rychlost podle vztahu:

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \implies \beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (15)$$

Použijeme-li součtový vzorec pro hyperbolický tangens, zjistíme, že:

$$\tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh(\phi_1) + \tanh(\phi_2)}{1 + \tanh(\phi_1) \tanh(\phi_2)} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} = \beta_3 \quad (16)$$

Protože $\beta_3 = \tanh(\phi_3)$, přímo z porovnání vyplývá aditivní vlastnost rapidity:

$$\phi_3 = \phi_1 + \phi_2 \quad (17)$$