

Odvození vzorce pro rapiditu (logaritmický tvar)

$$\varphi = \operatorname{artanh} \frac{v}{c} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v/c}{1 - v/c}$$

Autor hlavně AI, Dušan Polanský spíš věděl, co od ní chce

1. Definice rapidity

Rapidity φ je definována tak, že

$$\tanh \varphi = \frac{v}{c} \equiv \beta,$$

kde jsme pro stručnost zavedli $\beta = v/c$.

Cíl: vyjádřit φ explicitně pomocí elementárních funkcí — dostaneme výraz s přirozeným logaritmem.

2. Odvození pomocí exponenciální definice hyperbolické tangens

Použijeme definici hyperbolické tangens pomocí exponenciál:

$$\tanh \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}}.$$

Dosadíme $\tanh \varphi = \beta$ a ponecháme $y = e^\varphi > 0$:

$$\beta = \frac{y - y^{-1}}{y + y^{-1}}.$$

Vynásobíme jmenovatelem $y + y^{-1}$:

$$\beta (y + y^{-1}) = y - y^{-1}.$$

Upravíme:

$$\beta y + \beta y^{-1} = y - y^{-1} \implies \beta y - y = -\beta y^{-1} - y^{-1}.$$

Sesadíme členy s y a s y^{-1} :

$$y(\beta - 1) = -y^{-1}(\beta + 1).$$

Vynásobíme obě strany y :

$$y^2(\beta - 1) = -(\beta + 1).$$

Proto

$$y^2 = \frac{-(\beta + 1)}{\beta - 1} = \frac{\beta + 1}{1 - \beta}.$$

(Zde jsme vytáhli minus z jmenovatele.) Tudíž

$$e^{2\varphi} = y^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Vezmeme přirozený logaritmus a vydělíme dvěma:

$$2\varphi = \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \implies \boxed{\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \operatorname{artanh} \beta.}$$

Vraťme nyní $\beta = v/c$ a získáme požadovaný tvar:

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v/c}{1 - v/c} = \operatorname{artanh} \frac{v}{c}.}$$

3. Alternativní výrazy a souvislost s γ

Z rovnice $e^{2\varphi} = (1 + \beta)/(1 - \beta)$ plyne

$$e^\varphi = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Použijeme identitu $\cosh \varphi = \gamma$ a $\sinh \varphi = \gamma\beta$, pak

$$e^\varphi = \cosh \varphi + \sinh \varphi = \gamma(1 + \beta).$$

Odtud dostáváme další užitečný tvar:

$$\boxed{\varphi = \ln(\gamma(1 + \beta))}.$$

(Lze ověřit, že obě dvojice tvarů jsou ekvivalentní díky vztahu $\gamma(1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$.)

4. Krátká numerická ukázka

Pro ilustraci zvolme $\beta = 0.6$ (tj. $v = 0.6c$). Pak

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0.6}{1 - 0.6} = \frac{1}{2} \ln \frac{1.6}{0.4} = \frac{1}{2} \ln 4 = \frac{1}{2} \cdot (2 \ln 2) = \ln 2 \approx 0.693147.$$

Ověření pomocí γ : $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = 1/0.8 = 1.25$, takže $\gamma(1 + \beta) = 1.25 \cdot 1.6 = 2.0$ a $\ln(2.0) = \ln 2$, tedy souhlasí.

5. Poznámka

Vzorec $\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$ je obzvlášť praktický, protože rapidita se sčítá při složení rychlostí (hyperbolická analogie úhlů): pokud dvě Lorentzovy transformace mají rapidity φ_1, φ_2 , výsledná rapidita je $\varphi_1 + \varphi_2$. To činí rapiditu výhodným parametrem v teorii relativity.