

Ověření rovnosti $\frac{1}{2} \ln(4) = \ln(2)$

Dušan Polanský za pomoci AI

1 Úvod

V poznámce si podrobně ukážeme, proč platí logaritmická rovnost:

$$\frac{1}{2} \ln(4) = \ln(2) \quad (1)$$

Tento vztah je přímým důsledkem základních vět o logaritmech, konkrétně věty o logaritmu mocniny.

2 Matematický důkaz

Pro libovolný logaritmus o základu $a > 0$ ($a \neq 1$) a kladný argument x platí následující identita pro mocninu argumentu:

$$c \cdot \log_a(x) = \log_a(x^c) \quad (2)$$

Kde c je libovolné reálné číslo. V případě přirozeného logaritmu ($\ln$, kde základem je Eulerovo číslo e) můžeme toto pravidlo aplikovat přímo na levou stranu naší rovnice, kde $c = \frac{1}{2}$ a $x = 4$:

$$\frac{1}{2} \ln(4) = \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \quad (3)$$

Víme, že racionální exponent $\frac{1}{2}$ odpovídá druhé odmocnině z daného čísla:

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \quad (4)$$

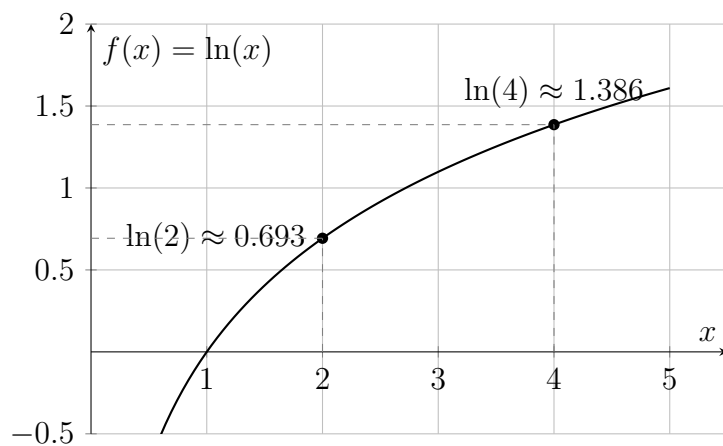
Protože druhá odmocnina ze čtyř je rovna dvěma ($\sqrt{4} = 2$), dosazením získáme:

$$\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(\sqrt{4}) = \ln(2) \quad (5)$$

Tím je rovnost dokázána. Obě strany vyjadřují stejné reálné číslo, jehož přibližná hodnota je 0,69315.

3 Vizualní znázornění pomocí grafu

Rovnost lze ilustrovat také geometricky na grafu funkce $f(x) = \ln(x)$. Z grafu níže je patrné, že funkční hodnota v bodě $x = 4$ je přesně dvakrát vyšší než funkční hodnota v bodě $x = 2$. Pokud tedy hodnotu $\ln(4)$ zkrátíme na polovinu, dostaneme přesně $\ln(2)$.



Obrázek 1: Graf přirozeného logaritmu s vyznačením klíčových bodů.