

Numerický příklad na zachování intervalu

$\beta = 0.6$ (tj. $v = 0.6c$), ukázka na události $(ct, x) = (2, 1)$

1. Volba parametrů

Nechť $c = 1$ a zvolíme rychlost transformace

$$\beta = \frac{v}{c} = 0.6.$$

Rapidita φ je dána vztahem

$$\varphi = \operatorname{artanh} \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Pro $\beta = 0.6$ dostaneme

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1.6}{0.4} = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2 \approx 0.693147.$$

Dále počítáme hyperbolické funkce:

$$\cosh \varphi = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.36}} = \frac{1}{0.8} = 1.25,$$

$$\sinh \varphi = \gamma\beta = 1.25 \cdot 0.6 = 0.75.$$

2. Matice boostu (Schoutenův tvar)

V zápisu, kde vektor zapisujeme v pořadí $(ct, x)^T$, má matice Lorentzovy transformace tvar:

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{pmatrix}.$$

3. Příklad: aplikace na událost

Vezmeme událost (v jednotkách $c = 1$):

$$X = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Po aplikaci boostu získáme

$$X' = L(\varphi) X = \begin{pmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme složky:

$$ct' = 1.25 \cdot 2 - 0.75 \cdot 1 = 2.50 - 0.75 = 1.75,$$

$$x' = -0.75 \cdot 2 + 1.25 \cdot 1 = -1.50 + 1.25 = -0.25.$$

Tedy

$$X' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.75 \\ -0.25 \end{pmatrix}.$$

4. Kontrola zachování intervalu

Počáteční interval (u $c = 1$) je

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3.$$

Interval po transformaci:

$$s'^2 = (ct')^2 - x'^2 = (1.75)^2 - (-0.25)^2 = 3.0625 - 0.0625 = 3.0000.$$

Vidíme, že $s'^2 = s^2 = 3$ (na numerické přesnosti shodné), tedy interval je zachován.