

Od klasické Lorentzovy transformace ke Schoutenovu zápisu

Algebraický přechod od klasické Lorentzovy transformace
k zápisu pomocí hyperbolických funkcí

Autor: Dušan Polanský za pomoci AI

Studijní materiál k pochopení geometrického zápisu
Lorentzovy transformace

Úvod

Lorentzova transformace bývá obvykle zapisována ve tvaru

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1)$$

Tento zápis je zcela správný, ale na první pohled příliš neodhaluje geometrickou strukturu transformace.

Cílem této kapitoly je ukázat, jak lze tutéž transformaci postupně přepsat do elegantního tvaru, který používá Schouten. Nezavádíme novou fyzikální transformaci; vhodně měníme pouze její matematický zápis.

klasická Lorentzova transformace $\longrightarrow$ maticový zápis $\longrightarrow (x, ct) \longrightarrow$ hyperbolické funkce.

1. Klasický zápis Lorentzovy transformace

Uvažujme dvě inerciální soustavy S a S' . Soustava S' se vzhledem k soustavě S pohybuje rychlostí v ve směru kladné osy x .

Zavedme Lorentzův faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Potom

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \quad (3)$$

Poznámka

Zatím jsme neudělali nic nového. Pouze jsme původní Lorentzovy rovnice zapsali pomocí Lorentzova faktoru γ .

2. Maticový zápis

Dvě lineární rovnice můžeme spojit do jediného maticového zápisu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Poznámka

Proč přecházíme k maticovému zápisu? Matice nám umožní chápat Lorentzovu transformaci jako lineární zobrazení souřadnic. Tento pohled bude později důležitý při geometrickém výkladu.

3. Krátké připomenutí násobení matic

Máme-li

$$\begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix},$$

pak

$$u' = k(a_{11}u + a_{12}w), \quad w' = k(a_{21}u + a_{22}w).$$

Aplikací na Lorentzovu transformaci dostaneme

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

tedy přesně původní rovnice.

Důležitá myšlenka

Maticový zápis není nový fyzikální obsah. Je to pouze kompaktní způsob, jak zapsat dvě současně platné lineární transformační rovnice.

4. Přejít od t k ct

V druhé rovnici vynásobíme obě strany rychlostí světla c :

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

V první rovnici použijeme

$$vt = \frac{v}{c} ct,$$

a dostaneme

$$x' = \frac{x - \frac{v}{c} ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Celá transformace tedy má tvar

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Nyní je transformační matice symetrická.

Poznámka

Proč přecházíme od t k ct ? Souřadnice x má rozměr délky, zatímco t má rozměr času. Veličina ct má rovněž rozměr délky. Dvojice (x, ct) je proto přirozená pro geometrický popis Minkowského prostoročasu.

5. Co je nyní v transformační matici pozoruhodné?

Po vynásobení obsahuje matice pouze dva různé výrazy:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Poznámka

Důležitý okamžik. V této chvíli se může zdát, že se hyperbolické funkce objeví “odnikud”. Ve skutečnosti jsou již skryty v klasickém zápisu Lorentzovy transformace. Stačí vhodně parametrizovat rychlost v .

6. Zavedení parametru pomocí hyperbolického tangens

Zavedme parametr β vztahem

$$\tanh \beta = \frac{v}{c}.$$

Použijeme identitu

$$1 - \tanh^2 \beta = \frac{1}{\cosh^2 \beta}.$$

Proto

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\cosh \beta},$$

a tedy

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \cosh \beta.} \quad (6)$$

Dále

$$\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \tanh \beta \cosh \beta = \sinh \beta.$$

Tedy

$$\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sinh \beta. \quad (7)$$

Důležitá myšlenka

Hyperbolické funkce jsme do Lorentzovy transformace nepřidali jako nový fyzikální předpoklad. Pouze jsme dva výrazy, které se v transformaci již vyskytovaly, vyjádřili pomocí jediného parametru β .

7. Proč právě hyperbolické funkce?

Nyní již můžeme přesně říci, co se stalo:

$$\cosh \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sinh \beta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Hyperbolické funkce tedy nejsou do teorie relativity vloženy uměle. Jsou přirozeným přepisem výrazů, které se objevily již v klasické Lorentzově transformaci.

8. Dosazení do transformační matice

Dosadíme tyto vztahy do matice z kapitoly 4:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta \\ -\sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}. \quad (8)$$

9. Roznásobení Schoutenovy matice

Z první řádky:

$$x' = x \cosh \beta - ct \sinh \beta.$$

Z druhé řádky:

$$ct' = ct \cosh \beta - x \sinh \beta.$$

Dosadíme-li zpět

$$\cosh \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sinh \beta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dostaneme

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

a

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Po vydělení druhé rovnice číslem c :

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Obdrželi jsme přesně původní Lorentzovy transformační rovnice.

10. Výsledný Schoutenův tvar

Celý výsledek lze shrnout:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta \\ -\sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad \tanh \beta = \frac{v}{c}. \quad (9)$$

Poznámka

Výsledný Schoutenův zápis nepředstavuje novou transformaci. Je to tatáž Lorentzova transformace zapsaná pomocí hyperbolických funkcí. Jeho výhodou je nejen elegantní tvar, ale především geometrická interpretace, kterou budeme studovat dále.

11. Shrnutí kapitoly

Co jsme se v této kapitole naučili?

1. Klasickou Lorentzovu transformaci lze zapsat maticově.
2. Přejít od t k ct vede k souřadnicím stejného fyzikálního rozměru.
3. Transformační matice se tím stane symetrickou.
4. V její matici se přirozeně objeví dva výrazy

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

5. Po zavedení

$$\tanh \beta = \frac{v}{c}$$

jsou tyto výrazy právě $\cosh \beta$ a $\sinh \beta$.

6. Lorentzovu transformaci proto můžeme zapsat ve Schoutenově tvaru

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta \\ -\sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}.$$

7. Schoutenův zápis není novou transformací, ale elegantním přepisem klasické Lorentzovy transformace.

Závěrečná poznámka

V této kapitole jsme postupovali čistě algebraicky. Hyperbolické funkce jsme použili proto, že umožňují stručně zapsat výrazy, které se objevily již v klasické Lorentzově transformaci.

Nyní však přichází zajímavější otázka:

Proč právě hyperbolické funkce?

Odpověď už není pouze algebraická. Souvisí s geometrií Minkowského prostoročasu.

V obyčejné eukleidovské rovině jsou přirozenými funkcemi pro popis rotace funkce $\cos \theta$ a $\sin \theta$ a jednotková kružnice splňuje

$$x^2 + y^2 = 1.$$

V Minkowského rovině má však invariantní interval tvar

$$(ct)^2 - x^2,$$

a příslušnou jednotkovou křivkou proto není kružnice, ale hyperbola

$$(ct)^2 - x^2 = 1.$$

Právě proto se při Lorentzových transformacích přirozeně objevují hyperbolické funkce.