Výpočet vlastních hodnot a normovaných vlastních vektorů

Mějme zadanou matici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Výpočet vlastních hodnot

Sestavíme charakteristickou rovnici $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-\lambda) - 4 = 0 \implies \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Rozložíme na součin:

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

Vlastní hodnoty jsou:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1$$

2. Normovaný vlastní vektor pro $\lambda_1 = 4$

Dosadíme $\lambda_1 = 4$ do soustavy $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 3-4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z první rovnice vyjádříme x_1:

$$-x_1 + 2x_2 = 0 \implies x_1 = 2x_2$$

Nyní použijeme normovací podmínku (délka vektoru musí být rovna 1):

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Dosadíme $x_1 = 2x_2$ do normovací podmínky:

$$(2x_2)^2 + x_2^2 = 1$$

$$4x_2^2 + x_2^2 = 1$$

$$5x_2^2 = 1 \implies x_2^2 = \frac{1}{5} \implies x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Zvolíme kladnou variantu $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (libovolné ze dvou znamének je správně) a dopočítáme x_1:

$$x_1 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

První normovaný vlastní vektor (po případném usměrnění zlomku) je:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

3. Normovaný vlastní vektor pro $\lambda_2 = -1$

Dosadíme $\lambda_2 = -1$ do soustavy $(A - \lambda_2 I)\vec{y} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 3+1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z první rovnice vyjádříme y_1:

$$4y_1 + 2y_2 = 0 \implies y_1 = -\frac{1}{2}y_2$$

Dosadíme do normovací podmínky $y_1^2 + y_2^2 = 1$:

$$\left(-\frac{1}{2}y_2\right)^2 + y_2^2 = 1$$

$$\frac{1}{4}y_2^2 + y_2^2 = 1$$

$$\frac{5}{4}y_2^2 = 1 \implies y_2^2 = \frac{4}{5} \implies y_2 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Zvolíme $y_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ a dopočítáme y_1:

$$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Druhý normovaný vlastní vektor je:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$